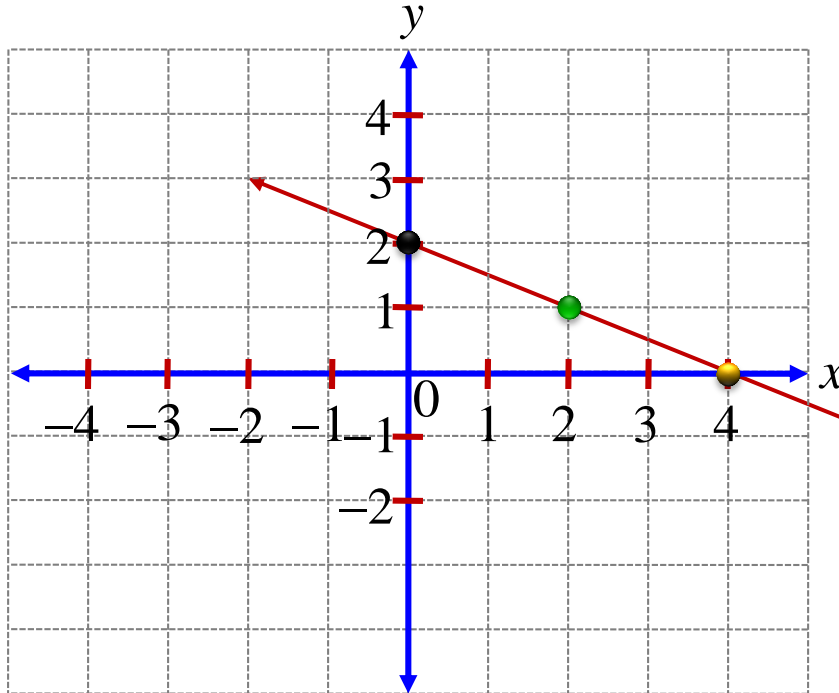


กราฟ



$$2x + 4y - 8 = 0$$

โดย

นายประกาศิต บุญวงศ์

ครู

โรงเรียนนวมินทราชินูทิศ สตรีวิทยา พุทธมณฑล



กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณที่มี ความสัมพันธ์เชิงเส้น

“มารุตกับกานต์ธิดา ขายเสื้อรวมกันได้ 9 ตัว”

กำหนดให้

x \longrightarrow จำนวนเสื้อที่มารุตขายได้
 y \longrightarrow จำนวนเสื้อที่กานต์ธิดาขายได้

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	7	6	5	4	3	2	1

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณที่มี ความสัมพันธ์เชิงเส้น

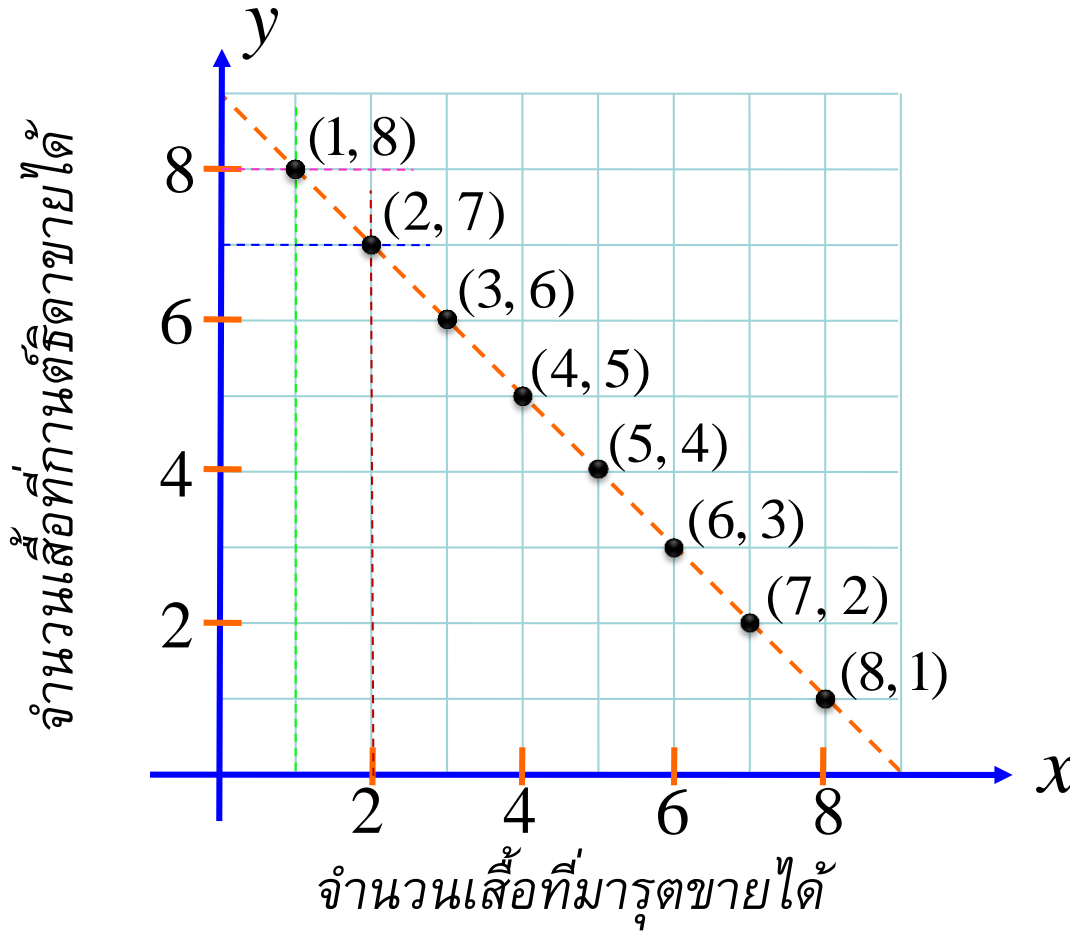
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	7	6	5	4	3	2	1

เขียนเป็นคู่อันดับ (x, y) ได้ดังนี้

$(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)$

กราฟ

(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)



กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณที่มี ความสัมพันธ์เชิงเส้น

ความสัมพันธ์ของหน่วยวัดอุณหภูมิระหว่างองศาเซลเซียส
และองศาฟาเรนไฮต์เป็นดังสมการ

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

C \longrightarrow อุณหภูมิในหน่วยองศาเซลเซียส

F \longrightarrow อุณหภูมิในหน่วยองศาฟาเรนไฮต์

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณที่มี ความสัมพันธ์เชิงเส้น

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

เมื่อกำหนดอุณหภูมิในหน่วยองศาเซลเซียส จะหาค่าของ
อุณหภูมิในหน่วยองศาฟาเรนไฮต์ได้ดังนี้

C	-30	-20	-10	0	10	20	30
F	-22	-4	14	32	50	68	86

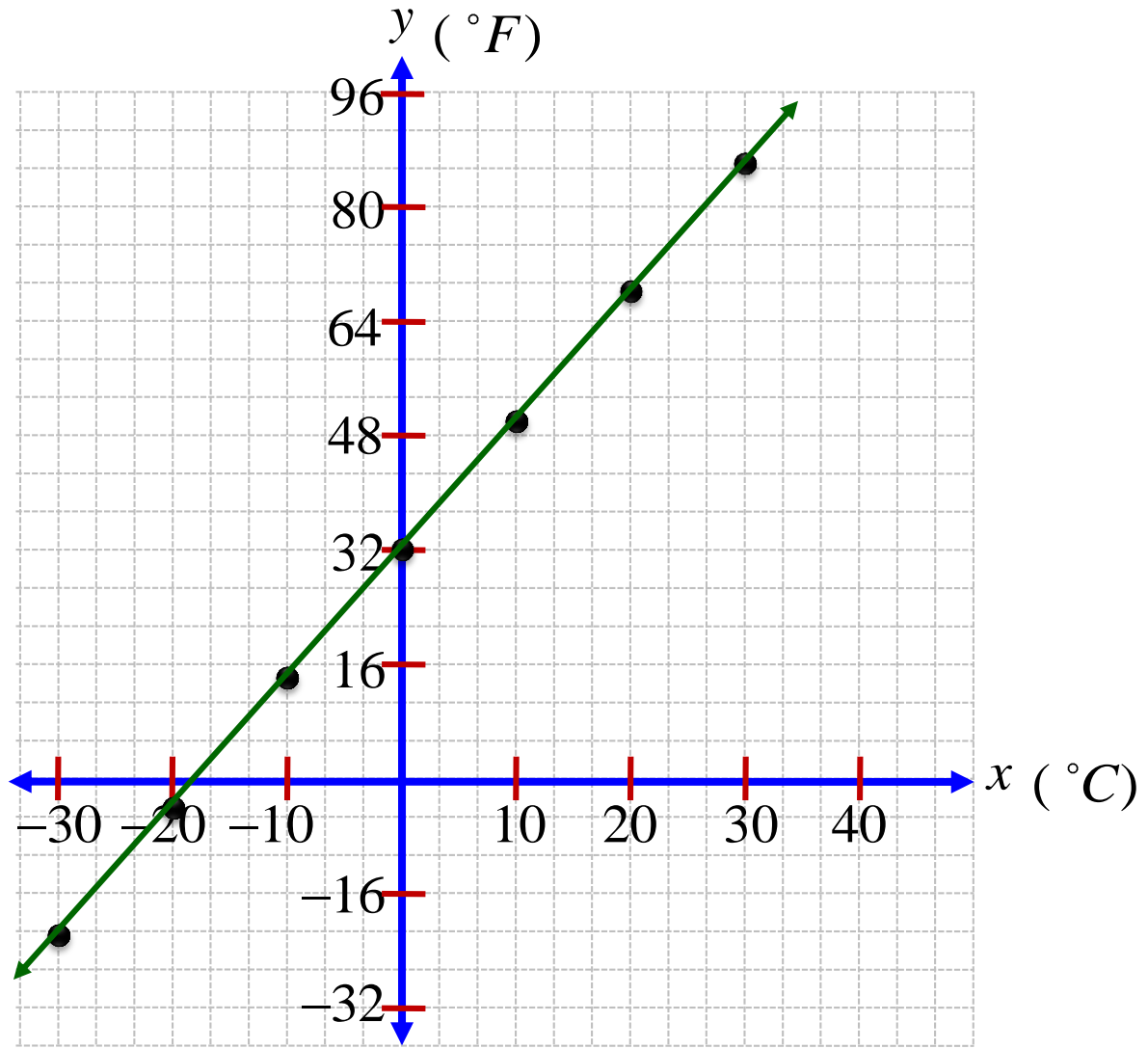
กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณที่มี ความสัมพันธ์เชิงเส้น

<i>C</i>	-30	-20	-10	0	10	20	30
<i>F</i>	-22	-4	14	32	50	68	86

จากตารางสามารถเขียนเป็นคู่อันดับแสดงความสัมพันธ์
ระหว่างอุณหภูมิในหน่วยองศาเซลเซียสกับองศาฟาเรนไฮต์ได้
ดังนี้

$(-30, -22), (-20, -4), (-10, 14), (0, 32), (10, 50), (20, 68), (30, 86)$

กราฟ



กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

นิยาม

สมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ สมการของความสัมพัทธ์เชิงเส้นที่แสดงความเกี่ยวข้องระหว่างปริมาณสองชุด

รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

$Ax + By + C = 0$ เมื่อ ① x, y เป็นตัวแปร

② A, B และ C เป็นค่าคงที่

③ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

การจะบอกว่าสมการที่กำหนดให้นั้นเป็นสมการเชิงเส้นสองตัวแปรหรือไม่ ให้พิจารณาดังนี้

- 1 มีตัวแปร 2 ตัว (บางครั้งอาจเห็นเพียงตัวเดียวก็ได้)
- 2 ตัวแปรต้องไม่มีการคูณกันอย่างเด็ดขาด
- 3 เลขชี้กำลังของตัวแปรต้องเป็น 1
- 4 สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็น 0 ได้เพียงตัวเดียว
- 5 ถ้าตัวแปรใดไม่เห็น แสดงว่ามีสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่าง

หรือไม่

จงหาว่าสมการต่อไปนี้ เป็นสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

- 1 $2x - 3y + 1 = 0$ ✓
- 2 $4x - 3y = 6$ ✓
- 3 $5x = \frac{1}{2}y + 7$ ✓
- 4 $x + y^2 + 7 = 0$ ✗
- 5 $x + 2 = 5$ ✓

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

นิยาม

กำหนดสมการเชิงเส้นสองตัวแปรดังนี้

$$Ax + By + C = 0$$

คู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ คือ คู่อันดับที่มีสมาชิกไปแทนในสมการ โดยที่สมาชิกตัวแรกแทนใน x และสมาชิกตัวหลังแทนใน y แล้วทำให้สมการเป็นจริง

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่าง

กำหนดสมการ $x + 2y - 5 = 0$ จงหาว่าคู่อันดับ $(1, 2)$ สอดคล้องกับสมการหรือไม่

วิธีทำ

แทน x ด้วย 1

แทน y ด้วย 2

$$x + 2y - 5 = 0$$

$$1 + 2(2) - 5 = 0$$

$$1 + 4 - 5 = 0$$

$$0 = 0$$



ดังนั้น คู่อันดับ $(1, 2)$ สอดคล้องกับสมการ $x + 2y - 5 = 0$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่าง

กำหนดสมการ $y = 2x + 1$ จงหาว่าคู่อันดับ $(2, 4)$ สอดคล้องกับสมการหรือไม่

วิธีทำ

แทน x ด้วย 2

แทน y ด้วย 4

$$y = 2x + 1$$

$$4 = 2(2) + 1$$

$$4 = 4 + 1$$

$$4 = 5 \quad \times$$

ดังนั้น คู่อันดับ $(2, 4)$ ไม่สอดคล้องกับสมการ $y = 2x + 1$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

การหาคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ ทำได้ดังนี้

- 1 กำหนดค่าตัวเลขมากค่าหนึ่ง (เลขอะไรก็ได้)
- 2 นำตัวเลขดังกล่าวไปแทนในตัวแปร x
- 3 จะได้สมการที่เหลือเพียงตัวแปร y
- 4 ทำการแก้สมการหาค่าของตัวแปร y
- 5 จะได้คู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการ

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่าง

จงหาคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $2x + 4y - 8 = 0$

วิธีทำ

แทน x ด้วย 0

$$2x + 4y - 8 = 0$$

$$2(0) + 4y - 8 = 0$$

$$4y - 8 = 0$$

$$4y = 8$$

$$y = \frac{8}{4}$$

$$y = 2$$

ดังนั้น คู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $2x + 4y - 8 = 0$ คือ $(0, 2)$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่าง

จงหาคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $2x + 4y - 8 = 0$

วิธีทำ

แทน x ด้วย 2

$$2x + 4y - 8 = 0$$

$$2(2) + 4y - 8 = 0$$

$$4y - 4 = 0$$

$$4y = 4$$

$$y = \frac{4}{4}$$

$$y = 1$$

ดังนั้น คู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $2x + 4y - 8 = 0$ คือ $(2, 1)$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่าง

จงหาคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $2x + 4y - 8 = 0$

วิธีทำ

แทน x ด้วย 4

$$2x + 4y - 8 = 0$$

$$2(4) + 4y - 8 = 0$$

$$8 + 4y - 8 = 0$$

$$4y = 0$$

$$y = \frac{0}{4}$$

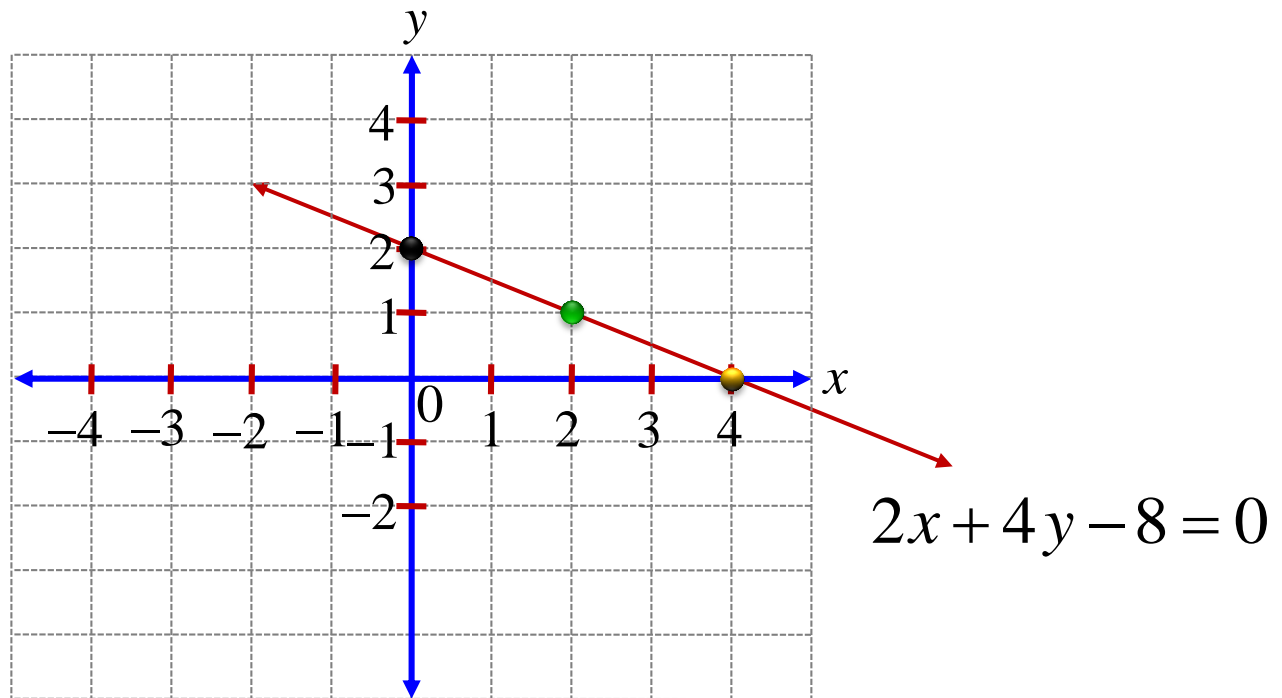
$$y = 0$$

ดังนั้น คู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $2x + 4y - 8 = 0$ คือ $(4, 0)$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

คู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $2x + 4y - 8 = 0$

ได้แก่ $(0, 2), (2, 1), (4, 0)$



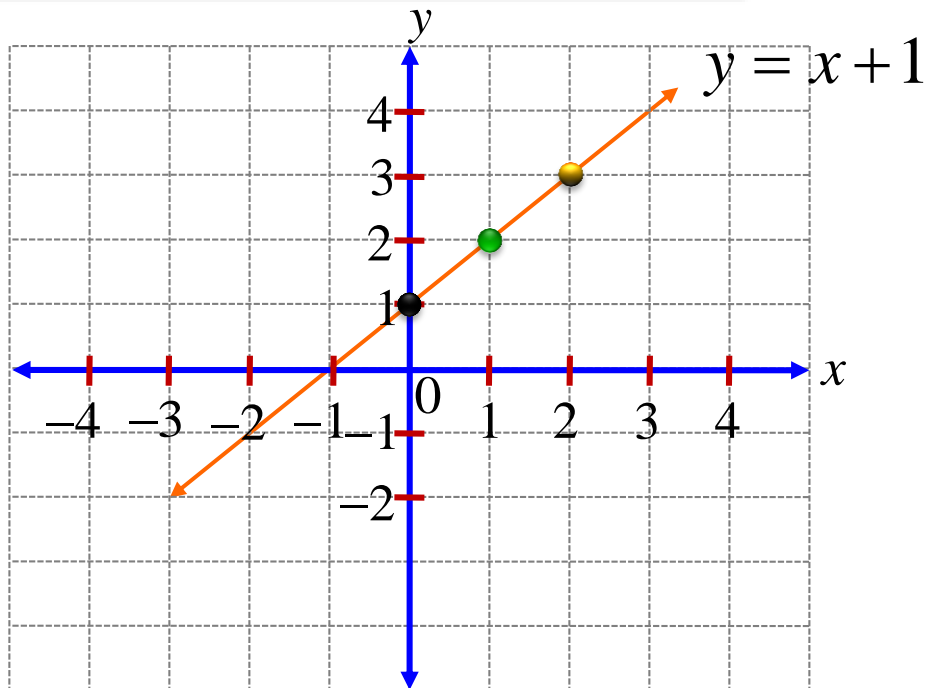
กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟของสมการ $y = x + 1$

วิธีทำ

x	0	1	2
y	1	2	3



กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

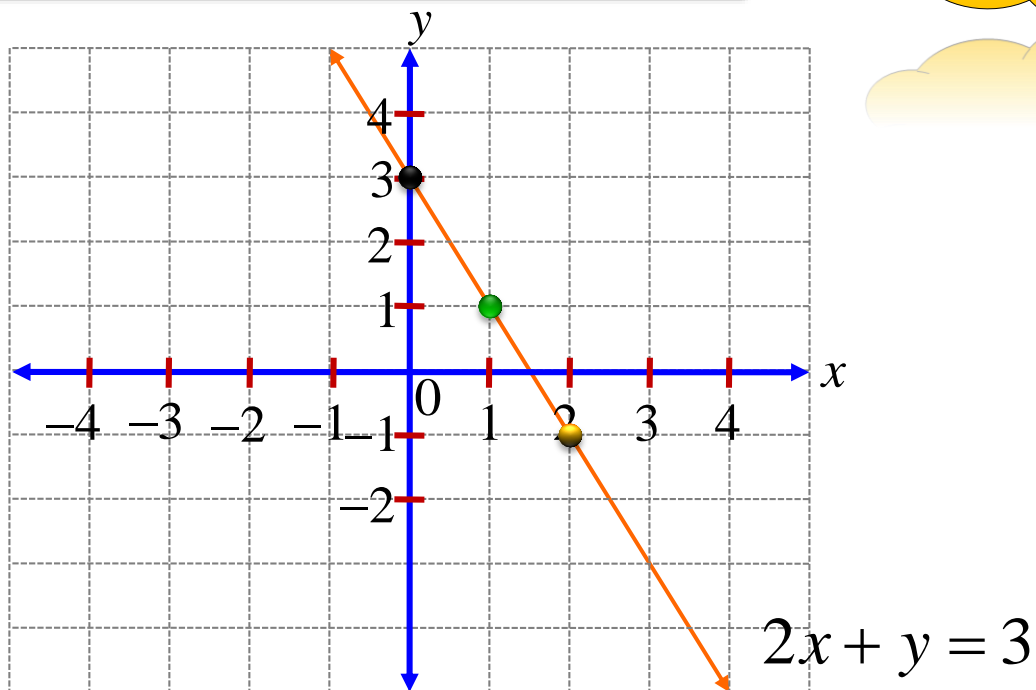
ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟของสมการ $2x + y = 3$

วิธีทำ

x	0	1	2
y	3	1	-1

$y = 3 - 2x$



กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

จากรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

$$Ax + By + C = 0$$

กราฟที่เกิดขึ้นจะมี 3 ลักษณะ ตามกรณีดังนี้

1 $A = 0, B \neq 0$

2 $B = 0, A \neq 0$

3 $A \neq 0, B \neq 0$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

1 $A = 0, B \neq 0$

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$(0)x + By + C = 0$$

$$0 + By + C = 0$$

$$By + C = 0$$

$$By = -C$$

$$y = -\frac{C}{B}$$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

1 $A = 0, B \neq 0$ $Ax + By + C = 0$ \longrightarrow $y = -\frac{C}{B}$

ตัวอย่าง

$0x + 2y + 2 = 0$ \longrightarrow $2y + 2 = 0$ \longrightarrow $y = -\frac{2}{2} = -1$

$0x + 3y - 6 = 0$ \longrightarrow $3y - 6 = 0$ \longrightarrow $y = -\frac{(-6)}{3} = 2$

$0x - 5y - 4 = 0$ \longrightarrow $-5y - 4 = 0$ \longrightarrow $y = -\frac{(-4)}{-5} = -\frac{4}{5}$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

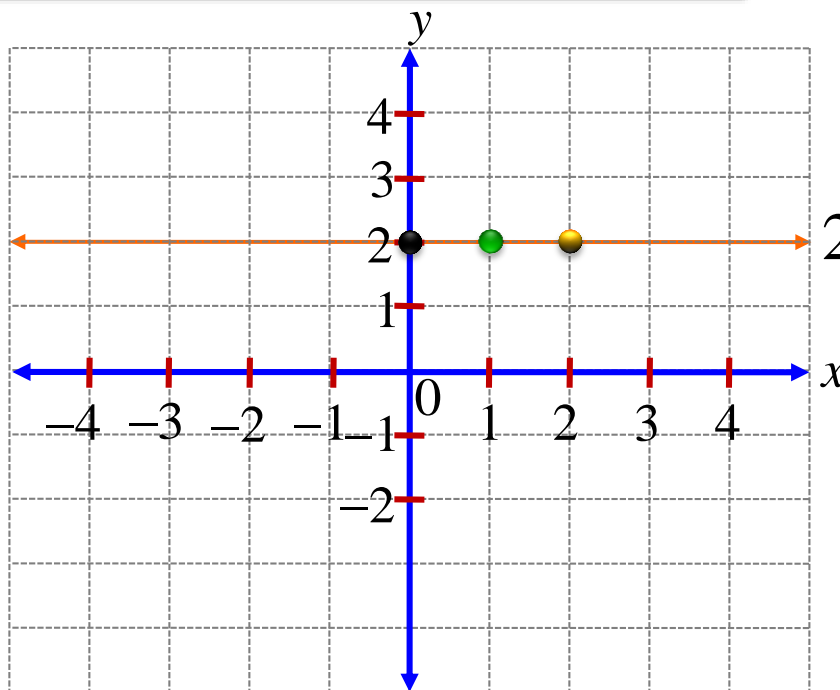
ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟของสมการ $2y - 4 = 0$

วิธีทำ

x	0	1	2
y	2	2	2

$$y = -\frac{(-4)}{2} = 2$$



$2y - 4 = 0$ หรือ
 $y = 2$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

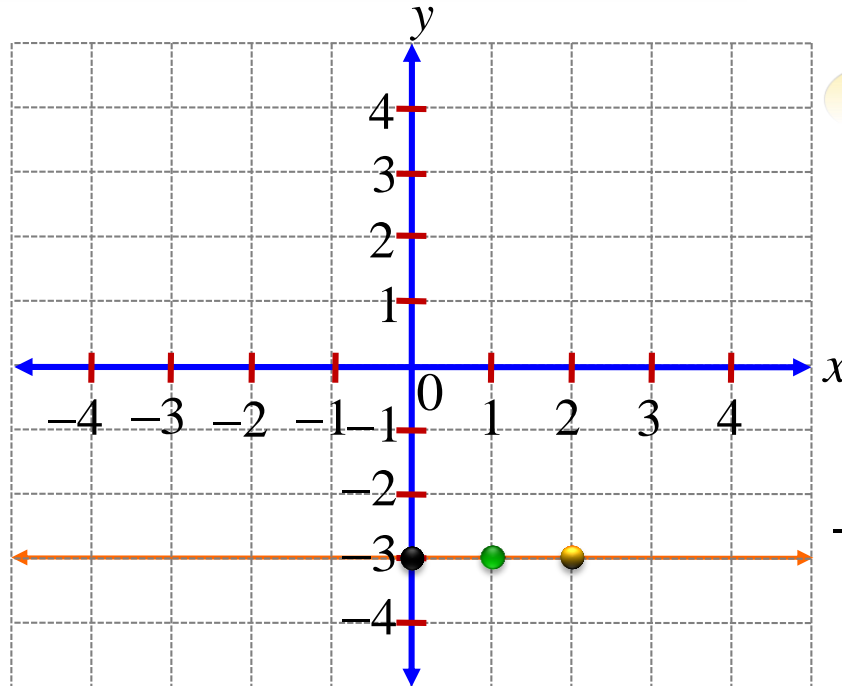
ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟของสมการ $-4y - 12 = 0$

วิธีทำ

x	0	1	2
y	-3	-3	-3

$$y = -\frac{(-12)}{(-4)} = -3$$



$-4y - 12 = 0$ หรือ
 $y = -3$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

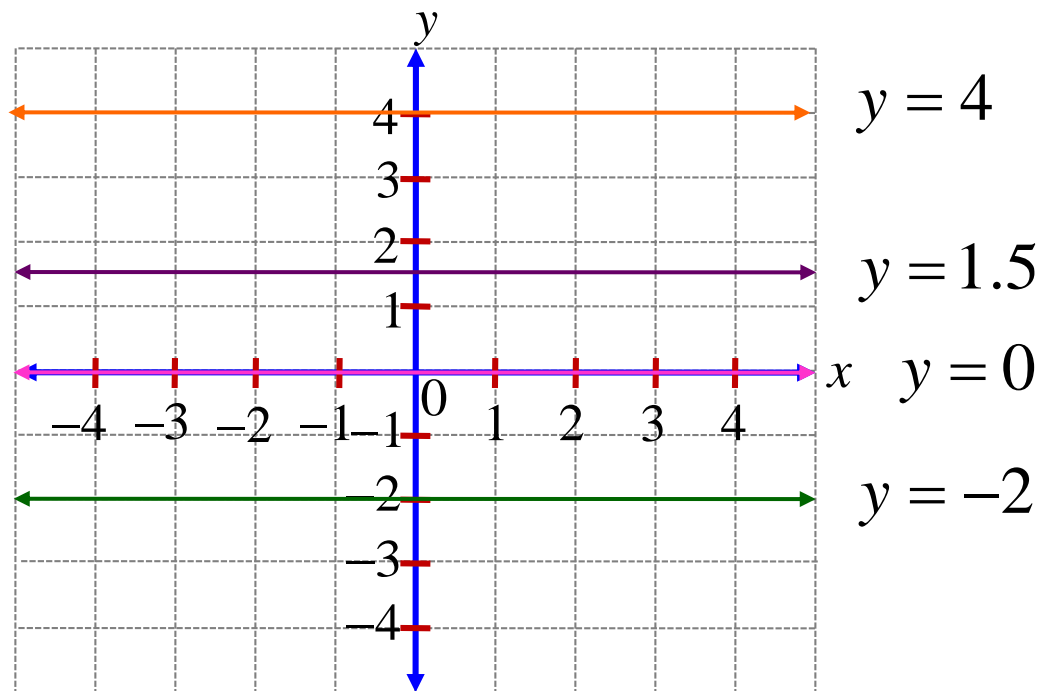
1 $A = 0, B \neq 0$ $Ax + By + C = 0$ \longrightarrow $y = -\frac{C}{B}$

ลักษณะสำคัญ

- กราฟที่เกิดขึ้นจะขนานกับแกน x
- กราฟตัดแกน y ตรงค่า a จะได้สมการเป็น $y = a$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

1 $A = 0, B \neq 0 \quad Ax + By + C = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -\frac{C}{B}$



กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

2 $B = 0, A \neq 0$

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax + (0)y + C = 0$$

$$Ax + 0 + C = 0$$

$$Ax + C = 0$$

$$Ax = -C$$

$$x = -\frac{C}{A}$$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

2 $B = 0, A \neq 0$ $Ax + By + C = 0$ \longrightarrow $x = -\frac{C}{A}$

ตัวอย่าง

$2x + 2 = 0$
 $2x + 0y + 2 = 0$

\longrightarrow $x = -\frac{2}{2} = -1$

$3x - 6 = 0$
 $3x + 0y - 6 = 0$

\longrightarrow $x = -\frac{(-6)}{3} = 2$

$-5x - 4 = 0$
 $5x - 0y - 4 = 0$

\longrightarrow $x = -\frac{(-4)}{-5} = -\frac{4}{5}$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

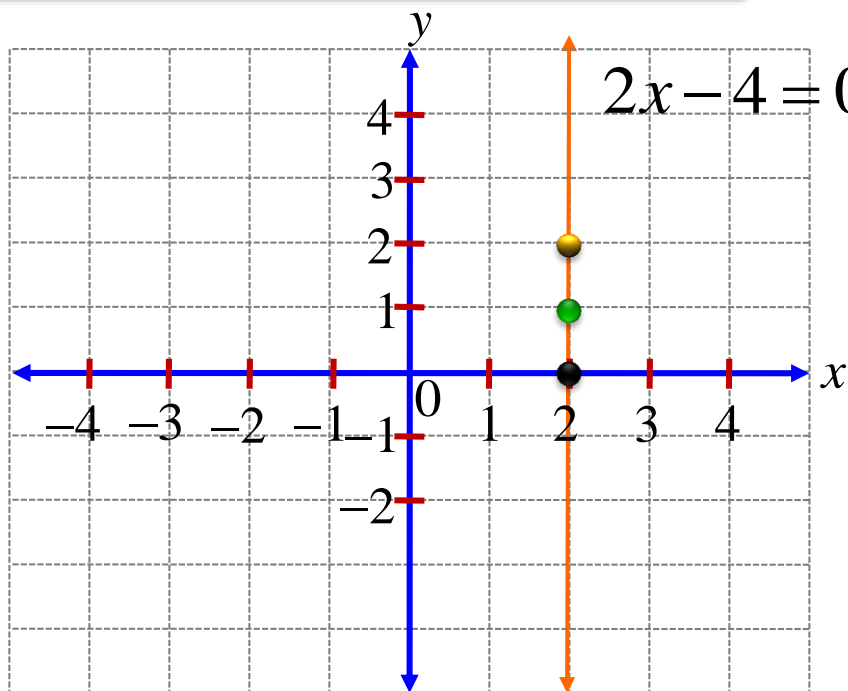
ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟของสมการ $2x - 4 = 0$

วิธีทำ

x	2	2	2
y	0	1	2

$$x = -\frac{(-4)}{2} = 2$$



กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

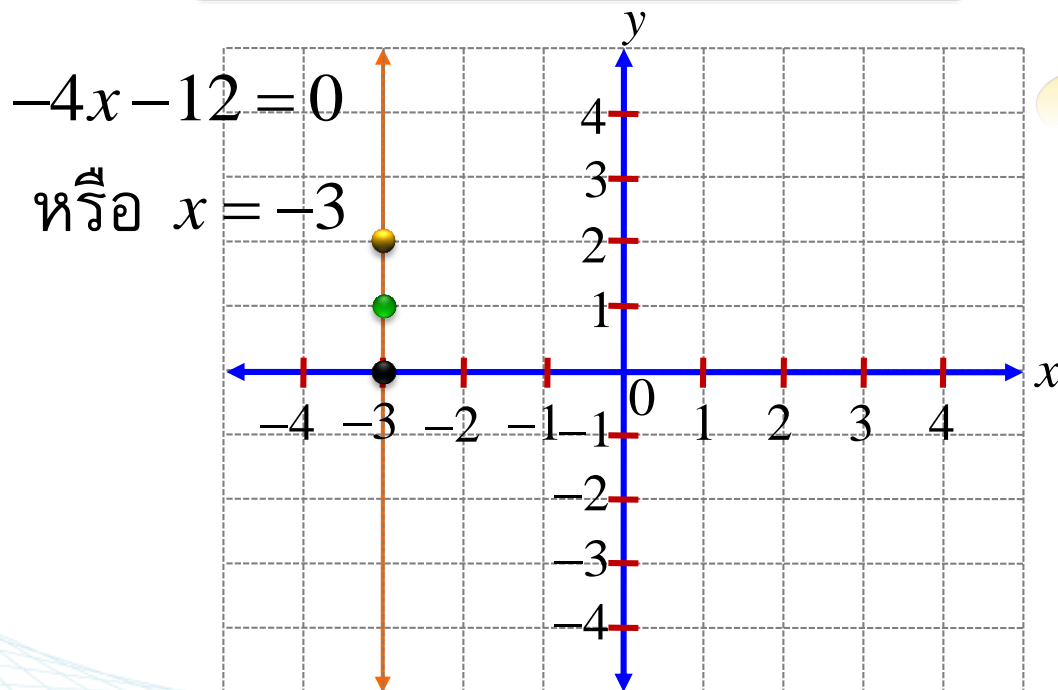
ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟของสมการ $-4x - 12 = 0$

วิธีทำ

x	-3	-3	-3
y	0	1	2

$$x = -\frac{(-12)}{(-4)} = -3$$



กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

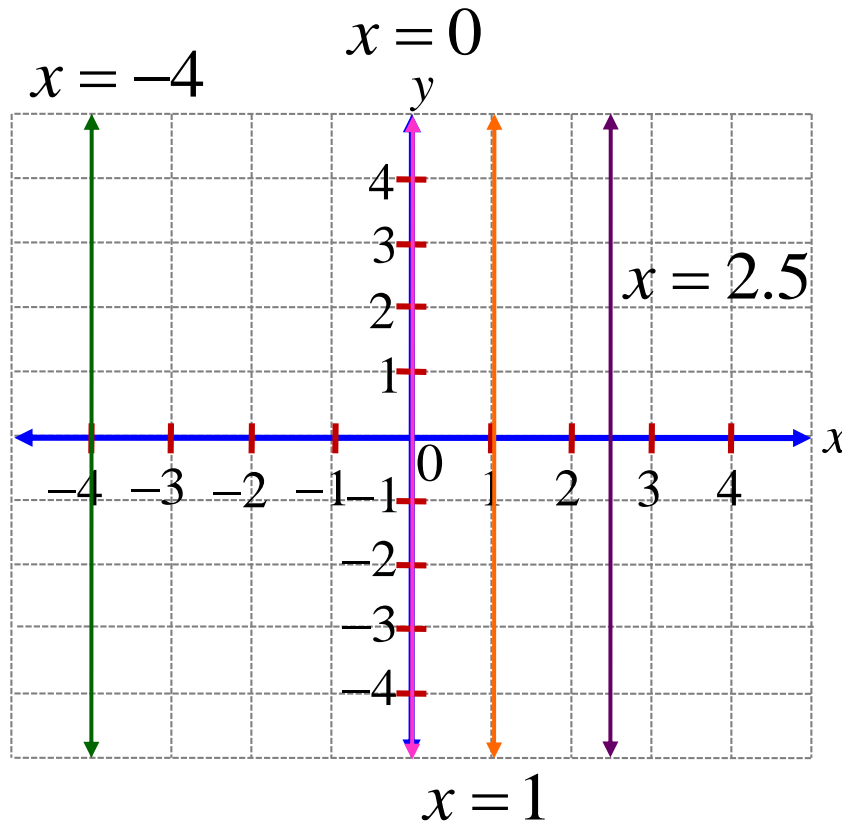
2 $B = 0, A \neq 0$ $Ax + By + C = 0$ \longrightarrow $x = -\frac{C}{A}$

ลักษณะสำคัญ

- กราฟที่เกิดขึ้นจะขนานกับแกน y
- กราฟตัดแกน x ตรงค่า a จะได้สมการเป็น $x = a$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

2 $B = 0, A \neq 0 \quad Ax + By + C = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -\frac{C}{A}$



กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

3 $A \neq 0, B \neq 0$

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = \frac{-Ax - C}{B}$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

3 $A \neq 0, B \neq 0$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$y = -\frac{A}{B}x + \left(-\frac{C}{B}\right)$$

$$y = \boxed{-\frac{A}{B}}x + \boxed{\left(-\frac{C}{B}\right)}$$

\downarrow \downarrow
 a b

$$y = ax + b$$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

3 $A \neq 0, B \neq 0$

$$y = ax + b$$

$$y = a_1x + b_1 \quad \text{-----} \rightarrow \quad \textcircled{1}$$

$$y = a_2x + b_2 \quad \text{-----} \rightarrow \quad \textcircled{2}$$

พิจารณากราฟของสมการทั้งสองตามกรณีดังนี้

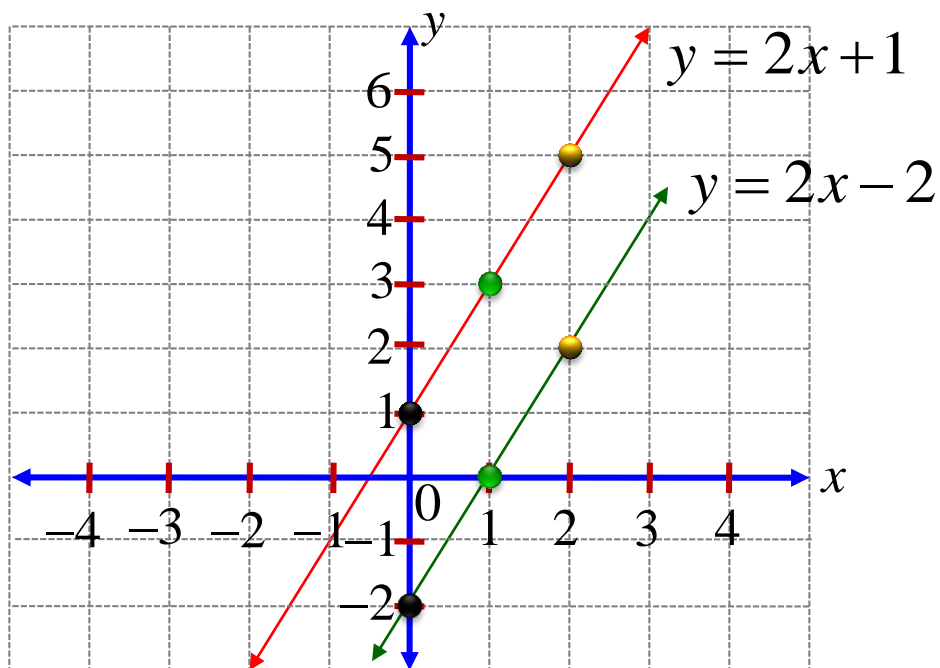
$\textcircled{\text{pink}}$ $a_1 = a_2$

$\textcircled{\text{blue}}$ $a_1 \neq a_2$

กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

● $a_1 = a_2$ สร้างกราฟของสมการ $y = 2x + 1$ และ $y = 2x - 2$

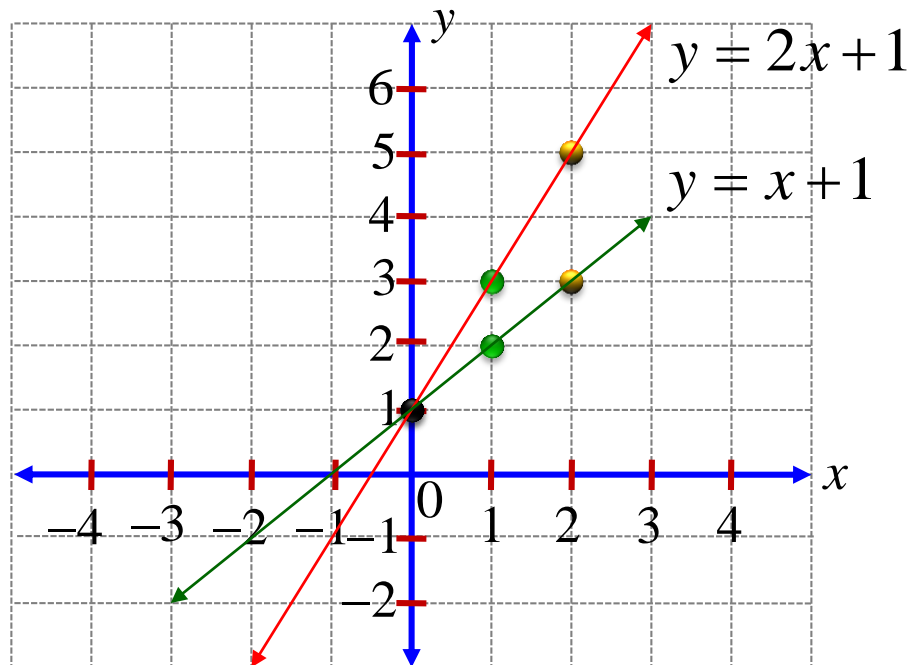
x	0	1	2
$y = 2x + 1$	1	3	5
$y = 2x - 2$	-2	0	2



กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

● $a_1 \neq a_2$ สร้างกราฟของสมการ $y = x + 1$ และ $y = 2x + 1$

x	0	1	2
$y = x + 1$	1	2	3
$y = 2x + 1$	1	3	5



กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

3 $A \neq 0, B \neq 0$

$$y = ax + b$$

$$y = a_1x + b_1 \quad \text{-----} \rightarrow \quad \textcircled{1}$$

$$y = a_2x + b_2 \quad \text{-----} \rightarrow \quad \textcircled{2}$$

ข้อสรุปที่ได้

$\textcircled{1}$ $a_1 = a_2$ จะได้กราฟที่ขนานกัน

$\textcircled{2}$ $a_1 \neq a_2$ จะได้กราฟที่ตัดกัน

กราฟ



กราฟกับการนำไปใช้

