ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทำได้โดยใช้วงกลมรัศมี 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และจะเรียกวงกลมดังกล่าวว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\middle|\; x^2+y^2=1 \right\}$

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ จากจุด $(1,0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x,y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

- เมื่อ $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
- เมื่อ $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา
- เมื่อ $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด $(1,0)$

จุด (x,y) ดังกล่าวจะเรียกว่า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ดังนั้นจึงสามารถกำหนดฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใดๆ

$$f(\theta) = x, \qquad g(\theta) = y$$

เมื่อ (x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางตามที่กล่าวข้างต้น เรียกฟังก์ชัน f และ g ดังกล่าวนี้ว่า **ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine)** และ **ฟังก์ชันไซน์ (sine)** ตามลำดับ และจะเขียนแทน f ด้วย cos และเขียนแทน g ด้วย sin ดังนี้

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta$$

วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\middle|\; x^2+y^2=1 \right\}$ จะเห็นว่า $-1 \le y \le 1$ และ $-1 \le x \le 1$ ดังนั้น ทั้งโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์คือเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

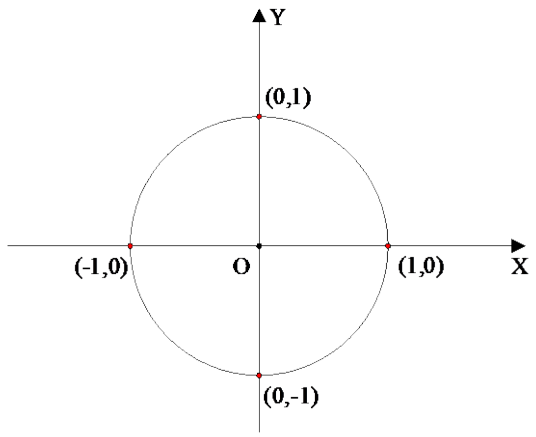
จากสมการ $x^2+y^2=1,\ y=\sin\theta,\ x=\cos\theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ดังนี้

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \text{ เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

หมายเหตุ $\cos^2\theta$ หมายถึง $(\cos\theta)(\cos\theta)$

$\sin^2\theta$ หมายถึง $(\sin\theta)(\sin\theta)$

1.1 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์



เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วยคือ $(1,0)$ ดังรูป จะได้ $\sin 0 = 0$ และ $\cos 0 = 1$

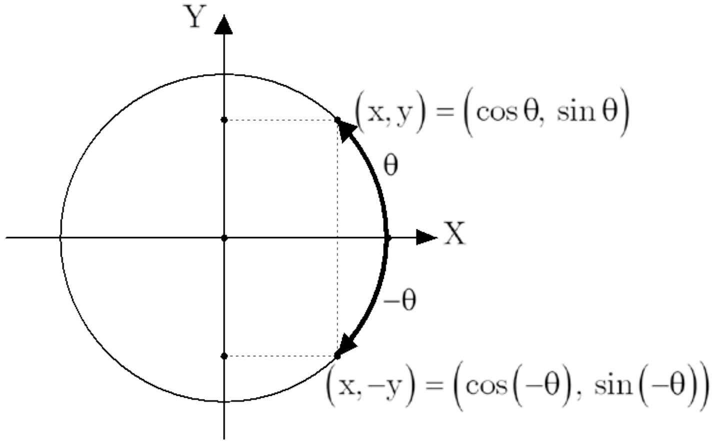
โดยเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย ดังนั้นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ จะมีโคออร์ดิเนตเป็น $(0,1), (-1,0), (0,-1)$ ตามลำดับ จะได้

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad \sin\pi = 0 \quad , \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad , \quad \cos\pi = 1 \quad , \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

จะเห็นว่าค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มนั้นหาได้จากโคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{n\pi}{2}$ หน่วย ซึ่งจุดปลายนั้นจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้ $(1,0), (0,1), (-1,0)$ และ $(0,-1)$

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ ทำได้โดยหา (x,y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย แต่โดยที่แกน X เป็นแกนสมมาตรแกนหนึ่งของวงกลมหนึ่งหน่วย ถ้าส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่เชื่อมระหว่างจุด $(1,0)$ กับจุด (x,y) ยาว $|\theta|$ หน่วย ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่เชื่อมระหว่างจุด $(1,0)$ กับจุด $(x,-y)$ จะต้องยาว $|\theta|$ หน่วยด้วย ดังนั้นเมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยคือจุด (x,y) จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย จะเป็นจุด $(x,-y)$



จากจุด (x,y) และ $(x,-y)$ ทำให้สรุปได้ว่า

$$x = \cos\theta \text{ และ } x = \cos(-\theta) \text{ ดังนั้น } \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$y = \sin\theta \text{ และ } -y = \sin(-\theta) \text{ ดังนั้น } \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

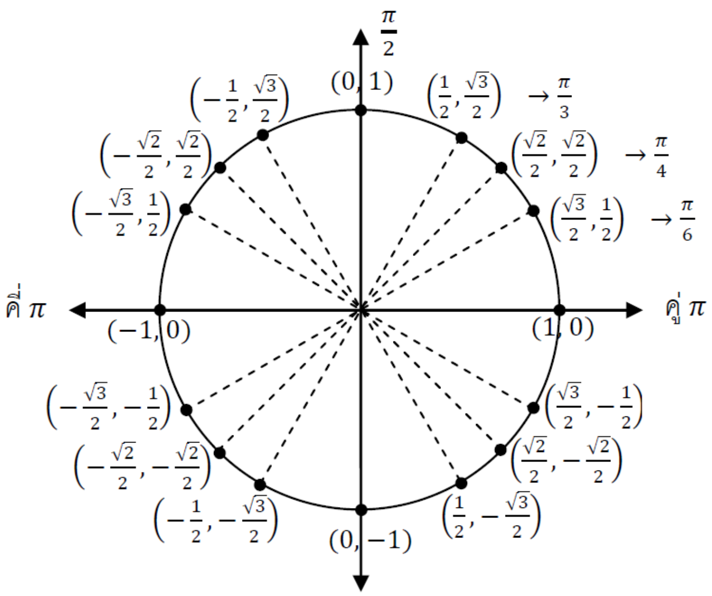
ถ้า $\theta > 2\pi$ และหาร θ ด้วย 2π แล้วได้ n เหลือเศษ α นั่นคือ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $0 \le \alpha < 2\pi$

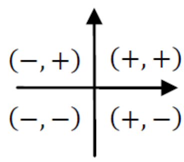
ดังนั้นการวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด $(1,0)$ ไปยาว θ หน่วย นั้นจึงวัดไป α หน่วยก็เพียงพอแล้ว เพราะจำนวน $2n\pi$ แสดงว่าการวัดต้องวัดครบรอบวงกลม n รอบ

จึงสรุปได้ว่า $\sin\theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\cos\theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$

พิกัดของมุมพื้นฐานมีดังนี้





จะเห็นได้ว่าตัวเลขพิกัด $(x,\ y)$ จะเป็นค่าเดียวกันกับ sin และ cos ของมุม $30^\circ,\ 45^\circ,\ 60^\circ$

และ $\pi = 180^\circ$ โดยจะใช้สัญลักษณ์ $P(\theta)$ แทน พิกัดของจุดปลายมุม θ

เช่น
$$P\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos 90^\circ, \sin 90^\circ\right) = (0, 1)$$
$$P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

แบบฝึกหัดที่ 1

จงหาพิกัดของข้อต่อไปนี้

1) $P(0)$

2) $P(\pi)$

3) $P\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

4) $P\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

5) $P\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

6) $P\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

7) $P\left(\frac{37\pi}{6}\right)$

8) $P\left(\frac{2020\pi}{6}\right)$

1.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใดๆ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

จากบทนิยามข้างต้น อาจหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่างๆได้ เช่น

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

แบบฝึกหัดที่ 2

1) จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนต่อไปนี้

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$
sin					
cos					
tan					
cot					
sec					
csc					

2) จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนต่อไปนี้

θ	$\frac{25\pi}{3}$	$-\frac{19\pi}{6}$	$\frac{29\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3} - \pi$	$\frac{35\pi}{4}$
sin					
cos					
tan					
cot					
sec					
csc					

3) จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนต่อไปนี้

θ	135°	300°	-480°	210°	-315°
sin					
cos					
tan					
cot					
sec					
csc					

4) กำหนดให้ $\sin\theta = 0.48$ และ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของ θ

5) ถ้า $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ จงหาค่าของ $\sec\theta + \mathrm{cosec}\,\theta$

6) ถ้า $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $2\cos\theta + \cot\theta$

7) จงหาค่าของ $\cot^2 30^\circ + 4\cos^2 45^\circ + 3\sec^2 30^\circ + \tan 45^\circ$

8) จงหาค่าของ $\sin\frac{3\pi}{2}+\tan\pi\cos\frac{\pi}{2}-\cot\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{7\pi}{6}$

9) จงหาค่าของ $\dfrac{\tan\left(-840^\circ\right)-\sin\left(-480^\circ\right)}{\cos\left(-930^\circ\right)}$

10) จงหาค่าของ $\dfrac{\sin 480^\circ+\cos 1290^\circ-\tan(-405^\circ)}{\sin 690^\circ}$

11) จงหาค่าของ $\cos 315^\circ \sin 22^\circ \tan 248^\circ \operatorname{cosec} 68^\circ$