



## บทที่ 1

### ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

### Infinite Sequences and Infinite Series

#### ผลการเรียนรู้

1. บอกได้ว่าลำดับอนันต์ใดเป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) หรือ ลำดับลู่ออก (divergent sequence) และถ้าเป็นลำดับลู่เข้า สามารถหาขีดจำกัดของลำดับนั้นได้ และบอกได้ว่าอนุกรมอนันต์ใดเป็นอนุกรมลู่เข้า (convergent series) หรือ อนุกรมลู่ออก (divergent series) และถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า สามารถหาผลบวกของอนุกรมนั้นได้

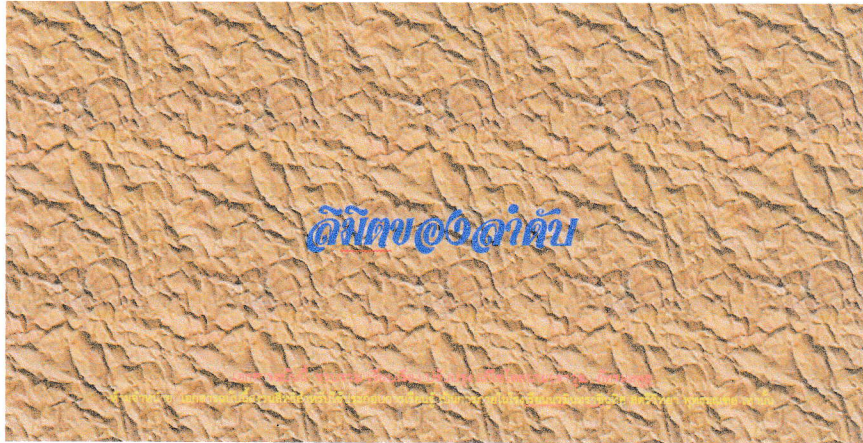
#### สาระ/เนื้อหา

##### ตอนที่ 1 ลำดับอนันต์

- 1.1 ขีดจำกัดของลำดับ
- 1.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับขีดจำกัด

##### ตอนที่ 2 อนุกรมอนันต์

- 2.1 ผลบวกของอนุกรมอนันต์
- 2.2 ทศนิยมซ้ำกับเศษส่วน
- 2.3 อนุกรมอื่นที่ควรทราบ



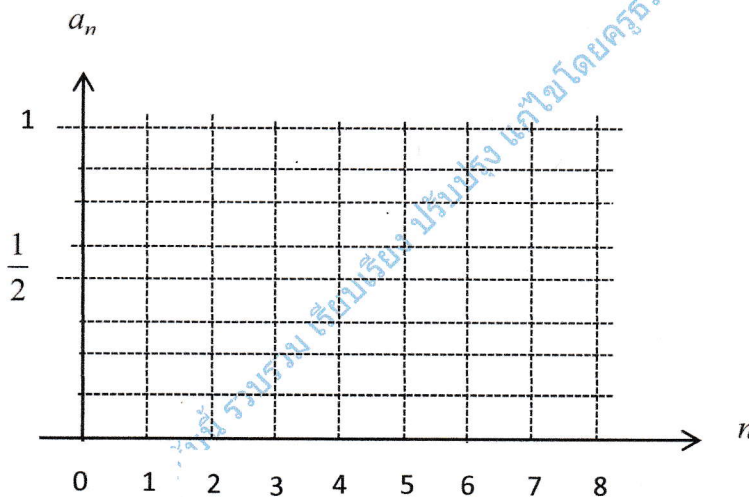
1  
ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์  
Infinite Sequences and Infinite Series

1. ลำดับอนันต์

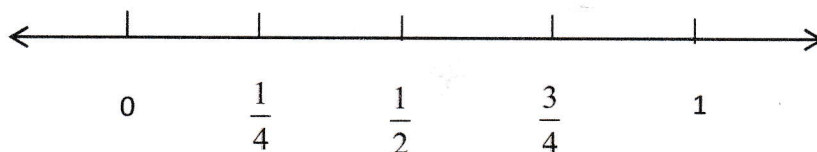
1.1 ลิมิตของลำดับ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมบัติอย่างหนึ่งของลำดับอนันต์(infinite sequence) ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูงขึ้นไป โดยพิจารณาพจน์ที่  $n$  ของลำดับ  $a_n$  เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

(1) จงเขียนและพิจารณากราฟของลำดับ  $a_n = \frac{1}{2^n}$

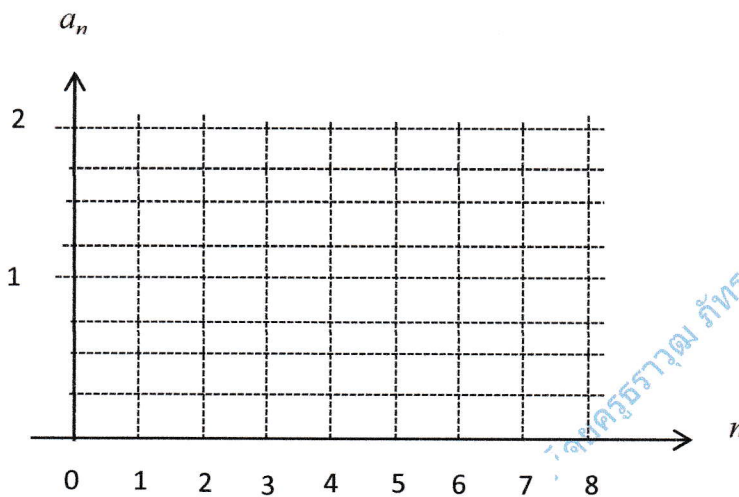


จงเขียนและพิจารณาดำแหน่งของ  $a_n$  ของลำดับ  $a_n = \frac{1}{2^n}$  บนเส้นจำนวน

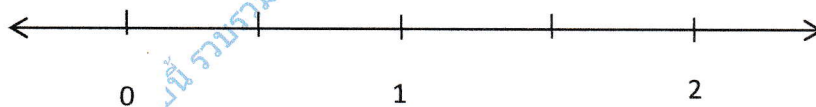


เส้นประที่เขียนในรูปกราฟของลำดับ  $a_n = \frac{1}{2^n}$  เป็นเส้นที่แสดงแนวของจุดในกราฟ เมื่อพิจารณาจากกราฟและตำแหน่งของพจน์ที่  $n$  บนเส้นจำนวน จะเห็นว่าถ้า  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด แล้ว  $a_n$  (พจน์ที่  $n$ ) ของลำดับ  $a_n = \frac{1}{2^n}$  มีค่าเข้าใกล้.....

(2) จงเขียนและพิจารณากราฟของลำดับ  $a_n = 1$



จงเขียนและพิจารณาดำแหน่งของ  $a_n$  ของลำดับ  $a_n = 1$  บนเส้นจำนวน



เส้นประที่เขียนในรูปกราฟของลำดับ  $a_n = 1$  เป็นเส้นที่แสดงแนวของจุดในกราฟ เมื่อพิจารณาจากกราฟและตำแหน่งของพจน์ที่  $n$  บนเส้นจำนวน จะเห็นว่าถ้า  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด แล้ว  $a_n$  (พจน์ที่  $n$ ) ของลำดับ  $a_n = 1$  มีค่าเป็น .....เสมอ สำหรับทุกค่าของ  $n$

**ข้อตกลง** สำหรับลำดับอนันต์ที่มี  $a_n$  เป็นพจน์ที่  $n$  เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดและพจน์ที่  $n$  มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง  $L$  เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น จะเรียก  $L$  ว่า **ลิมิตของลำดับ** (limit of sequence) และจะกล่าวว่าลำดับนั้นมีลิมิต เท่ากับ  $L$

ดังนั้น ในตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่า ลำดับ  $a_n = \frac{1}{2^n}$  มีลิมิตเท่ากับ .....

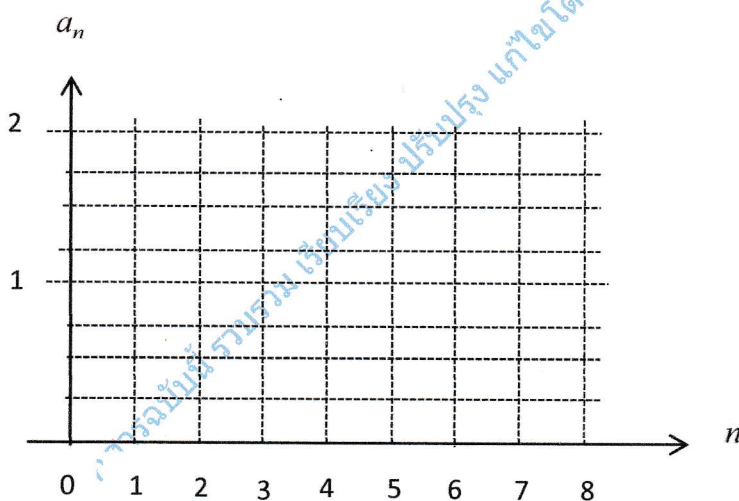
และ ลำดับ  $a_n = 1$  มีลิมิตเท่ากับ .....

**ข้อตกลง** เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)

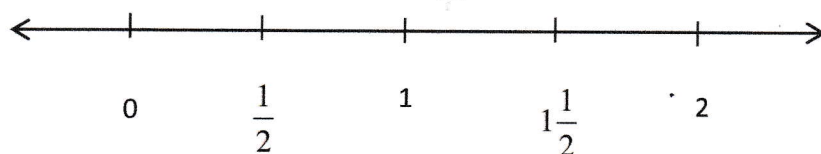
ดังนั้น จะเห็นว่า ลำดับ  $a_n = \frac{1}{2^n}$  เป็นลำดับ..... มีลิมิต เท่ากับ .....

และ ลำดับ  $a_n = 1$  เป็นลำดับ..... มีลิมิต เท่ากับ .....

(3) จงเขียนและพิจารณากกราฟของลำดับ  $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$



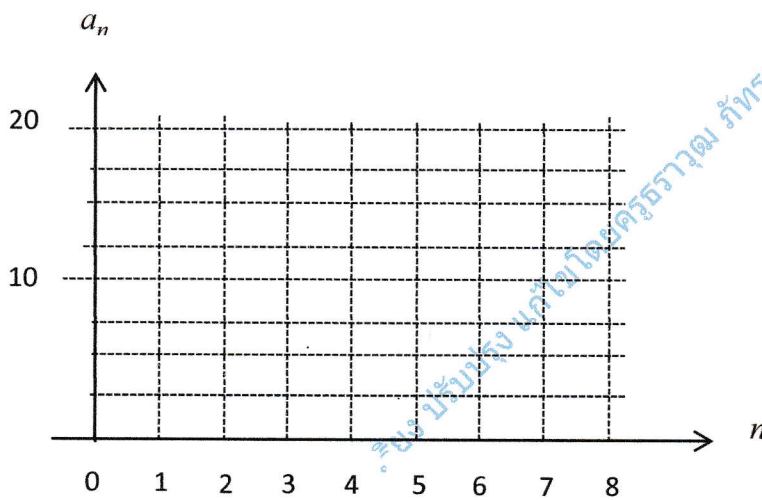
จงเขียนและพิจารณาดำแหน่งของ  $a_n$  ของลำดับ  $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$  บนเส้นจำนวน



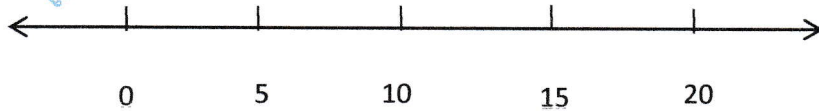
เส้นประที่เขียนในรูปกราฟของลำดับ  $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$  เป็นเส้นที่แสดงแนวของจุดในกราฟ เมื่อพิจารณาจากกราฟและตำแหน่งของพจน์ที่  $n$  บนเส้นจำนวน จะเห็นว่าถ้า  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด แล้ว  $a_n$  (พจน์ที่  $n$ ) ของลำดับ  $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$  มีค่าเข้าใกล้ .....

ดังนั้น ลำดับ  $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$  เป็นลำดับ..... มีลิมิต เท่ากับ .....

(4) จงเขียนและพิจารณากราฟของลำดับ  $a_n = 2n - 1$



จงเขียนและพิจารณาดำแหน่งของ  $a_n$  ของลำดับ  $a_n = 2n - 1$  บนเส้นจำนวน

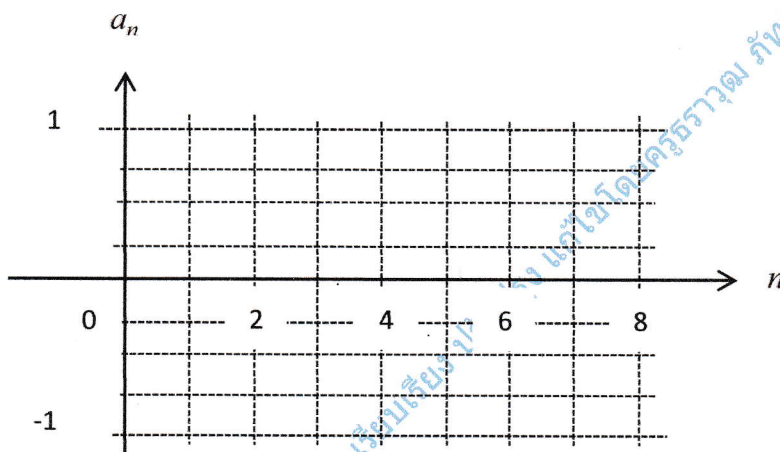


เส้นประที่เขียนในรูปกราฟของลำดับ  $a_n = 2n - 1$  เป็นเส้นที่แสดงแนวของจุดในกราฟ เมื่อพิจารณาจากกราฟและตำแหน่งของพจน์ที่  $n$  บนเส้นจำนวน จะเห็นว่าถ้า  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด แล้ว  $a_n$  (พจน์ที่  $n$ ) ของลำดับ  $a_n = 2n - 1$  มีค่ามากขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง จึงกล่าวได้ว่าลำดับ  $a_n = 2n - 1$  ไม่มีลิมิต ดังนั้น ลำดับ  $a_n = 2n - 1$  จึงไม่ใช่ลำดับลู่เข้า

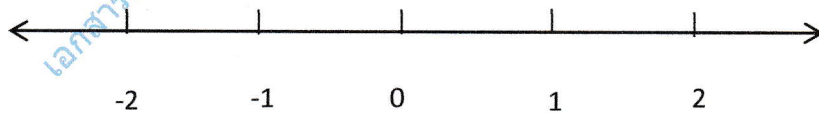
**ข้อตกลง** เรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้า (convergent sequence) ว่า ลำดับลู่ออก (divergent sequence)

ดังนั้น เรียกลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิต ว่า .....

(5) จงเขียนและพิจารณากราฟของลำดับ  $a_n = (-1)^n$



จงเขียนและพิจารณาคำแหน่งของ  $a_n$  ของลำดับ  $a_n = (-1)^n$  บนเส้นจำนวน



เส้นประที่เขียนในรูปกราฟของลำดับ  $a_n = (-1)^n$  เป็นเส้นที่แสดงแนวของจุดในกราฟ เมื่อพิจารณาจากกราฟและตำแหน่งของพจน์ที่  $n$  บนเส้นจำนวน จะเห็นว่าถ้า  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคี่แล้ว  $a_n$  มีค่าเป็น..... แต่เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคู่แล้ว  $a_n$  มีค่าเป็น..... ดังนั้น เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว พจน์ที่  $n$  ของลำดับ  $a_n = (-1)^n$  มิเข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่งเพียงจำนวนเดียว ดังนั้น ลำดับ  $a_n = (-1)^n$  จึงไม่มีลิมิต ดังนั้น ลำดับ  $a_n = (-1)^n$  เป็นลำดับ..... และเราจะเรียกลำดับลู่ออกที่มีลักษณะของกราฟมีค่าสูงและต่ำสลับกันโดยไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่งเช่นนี้ว่า ลำดับแกว่งกวัด (oscillating sequence)

ห้ามจำหน่าย เอกสารฉบับนี้สงวนสิทธิ์สำหรับใช้ประกอบการเรียนรู้ เป็นการภายในโรงเรียนนวมินทราชินูทิศ สตรีวิทยา พุทธมณฑล เท่านั้น



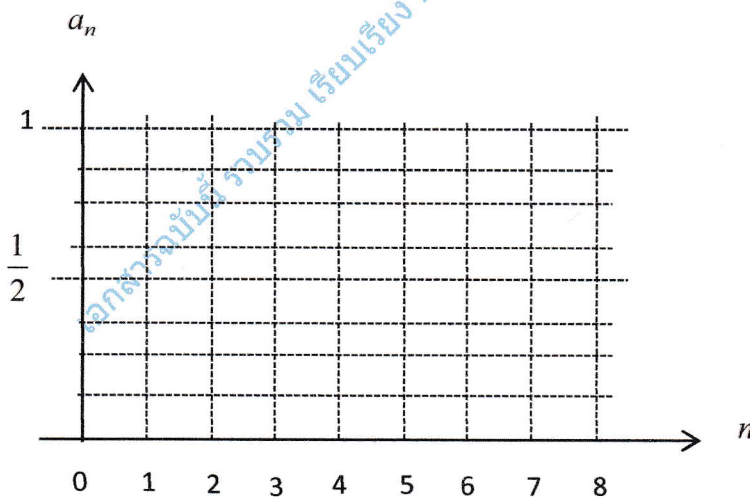
**ข้อสังเกต** เกี่ยวกับลิมิตของลำดับ

1. ลำดับที่นำมาพิจารณาลิมิตนั้นต้องเป็นลำดับอนันต์
2. ถ้ากล่าวหาว่า  $L$  เป็นลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่  $n$  เป็น  $a_n$  หมายถึง เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่  $n$  ของลำดับจะมีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง  $L$  จำนวนเดียวเท่านั้น กล่าวได้ว่า

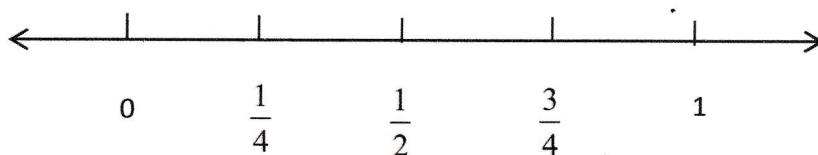
$$L \text{ เป็นลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ } n \text{ เป็น } a_n \text{ และเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

3. ลำดับอนันต์ที่มีลิมิตเรียกว่าลำดับลู่เข้า (convergent sequence)
4. ลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตเรียกว่าลำดับลู่ออก (divergent sequence)
5. การพิจารณาว่าลำดับอนันต์ใดจะมีลิมิตหรือไม่นั้น อาจทำได้โดยการพิจารณาจากกราฟของลำดับ หรือ ตำแหน่งของพจน์ที่  $n$  ของลำดับบนเส้นจำนวนเมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด หรือ โดยสังเกตค่าของพจน์ที่  $n$  ของลำดับ เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า ลำดับ  $a_n = \frac{1}{n}$  เป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) หรือ ลำดับลู่ออก (divergent sequence) และถ้าเป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) จงหาค่าลิมิตของลำดับนี้



จงเขียนและพิจารณาดำแหน่งของ  $a_n$  ของลำดับ  $a_n = \frac{1}{n}$  บนเส้นจำนวน



เมื่อพิจารณาจากกราฟของลำดับ หรือจากตำแหน่งของพจน์ที่  $n$  ของลำดับบนเส้นจำนวน จะเห็นว่า ถ้า  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด แล้ว  $a_n$  (พจน์ที่  $n$ ) ของลำดับ  $a_n = \frac{1}{n}$  มีค่าเข้าใกล้.....

ดังนั้น ลำดับ  $a_n = \frac{1}{n}$  เป็นลำดับ..... และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \dots\dots\dots$

ข้อควรจำ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**แบบฝึกหัด 1.1**

จงเขียนห้าพจน์แรกของลำดับต่อไปนี้ พร้อมทั้งตรวจสอบแต่ละลำดับว่า ลำดับใดบ้างเป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) หรือเป็นลำดับลู่ออก (divergent sequence) และถ้าเป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) จงหาขีดจำกัดของลำดับนั้นด้วย

1.  $a_n = \frac{2}{3n}$

.....

.....

.....

.....

2.  $a_n = \frac{n}{n+1}$

.....

.....

.....

.....

ห้ามจำหน่าย เอกสารฉบับนี้สงวนสิทธิ์สำหรับใช้ประกอบการเรียนรู้ เป็นการภายใน โรงเรียนนวมินทราชินูทิศ สตรีวิทยา พุทธมณฑล เท่านั้น

3.  $a_n = \frac{n+1}{n}$

.....

.....

.....

.....

4.  $a_n = \frac{3n-2}{3n+5}$

.....

.....

.....

.....

5.  $a_n = \frac{3n+5}{7}$

.....

.....

.....

.....

6.  $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

.....

.....

.....

.....

7.  $a_n = \frac{4+5n}{n^2}$

.....

.....

.....

.....

8.  $a_n = \frac{4n^2 - 3n + 2}{4 + 3n - 2n^2}$

.....

.....

.....

.....

9.  $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

.....

.....

.....

.....

10.  $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$

.....

.....

.....

.....

11.  $a_n = \cos 2n\pi$

.....

.....

.....

.....

12.  $a_n = \frac{1}{n} \cos 2n\pi$

.....

.....

.....

.....